Deux carreaux

En bref

tracer sur une grille de 3x3 des polygones ayant une aire de deux carreaux

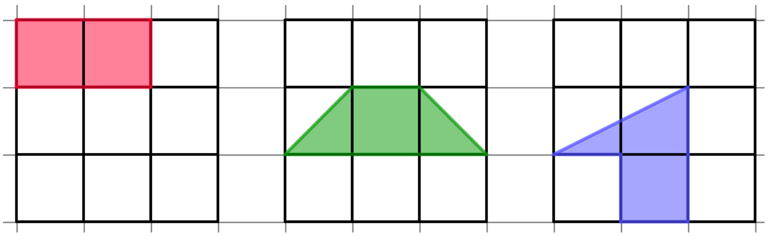
Introduction du problème

Nous avons rédigé cette introduction en pensant à une classe dans laquelle la notion d'aire a déjà été travaillée.

Si ce n'est pas le cas, on peut quand même l'aborder en disant que les polygones « contiennent deux carreaux ». Ce problème peut alors servir d'introduction à la notion d'aire : tous les polygones qui contiennent autant de carreaux ont la même aire... quand un polygone est tracé à l'intérieur d'un autre, il contient moins de carreaux, son aire est plus petite...

Dans tous les cas, on évitera absolument d'utiliser la formule de calcul de l'aire d'un triangle.

Par ailleurs, il est souvent question de demi-carreau ou de moitié de carreau. Le demi, ou la moitié sont des notions suffisamment utilisées dans la vie courante pour être familières, on peut donc les utiliser même si les fractions n'ont pas encore été abordées en classe.

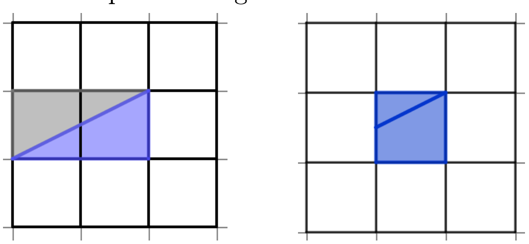


— Ces trois figures ont un point commun : elles ont une aire de deux carreaux.

Pour la figure rouge, c'est facile, on voit les deux carreaux entiers.

La figure verte a un carreau entier au milieu. Les deux triangles sont des moitiés de carreau, en les assemblant on peut former un deuxième carreau.

Pour la figure bleue, c'est un peu plus difficile. Il y a bien un carreau entier en bas, mais comment être sûr que le triangle contient exactement un carreau ?

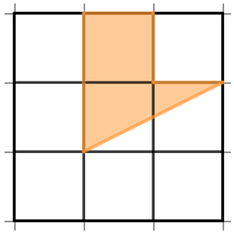


Il contient un carreau parce que c'est la moitié d'un rectangle de deux carreaux.

On peut aussi découper le triangle bleu en deux parties et déplacer le petit morceau pour former un carreau.

Vous allez inventer chacun un autre polygone ayant une aire de deux carreaux.

Vous avez sans doute deviné que les sommets doivent être sur les intersections de la grille et que si on déplace ou si on retourne un polygone, ça n'en fait pas un nouveau.



Ce polygone est le même que le polygone bleu du début.

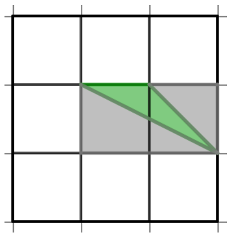
Les propositions des élèves sont affichées et numérotées puis discutées : on élimine d'abord les doublons puis on s'assure que l'aire de chaque figure est bien égale à deux carreaux.

Il est très probable que les figures seront constituées uniquement de carreaux entiers et des deux modèles de triangles montrés en exemples par l'enseignante. L'évaluation de l'aire est alors facile.

Si ce n'est pas le cas et si certaines propositions semblent trop difficiles pour que leur aire soit évaluée immédiatement, elles sont mises de côté pour être traitées lors d'une autre séance.

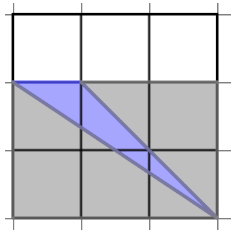
Éléments de relance

Il existe d'autres « petits »triangles que l'on peut assembler pour former des polygones ayant une aire de deux carreaux. En voici deux exemples.



L'aire du triangle vert mesure une moitié de carreau.

On l'obtient on enlevant d'un rectangle qui contient deux carreaux les deux triangles déjà connus : l'un contient un carreau, l'autre un demi-carreau, il reste un demi-carreau.



L'aire du triangle bleu mesure un carreau.

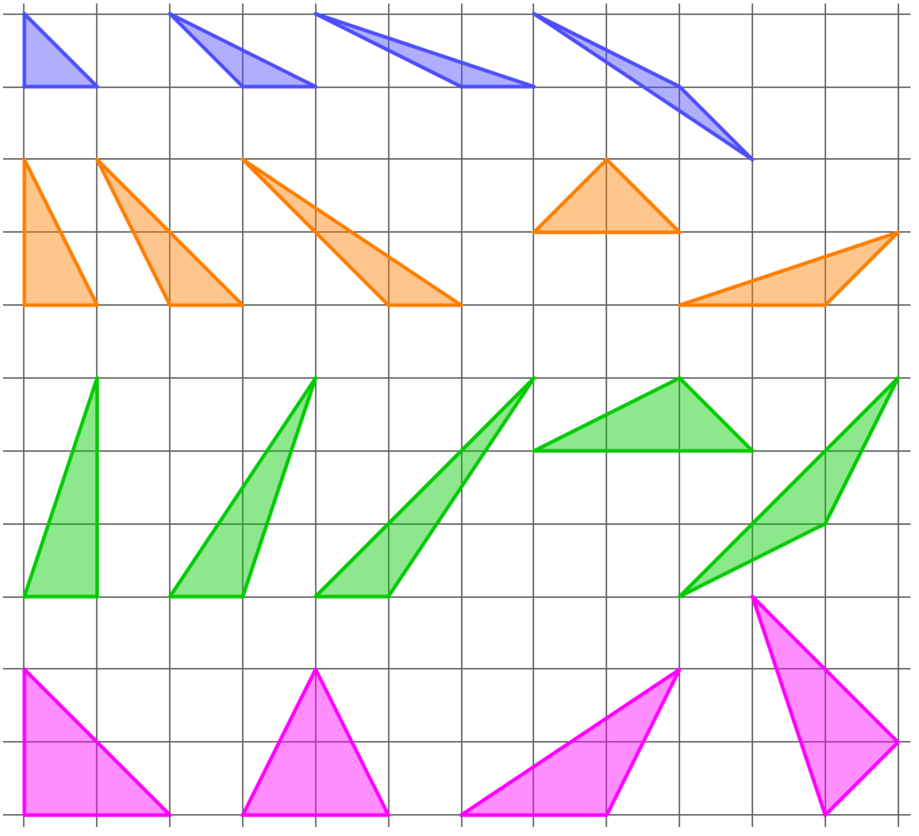
On l'obtient on enlevant deux triangles d'un rectangle qui contient 6 carreaux.

Un des triangles à enlever est la moitié du rectangle de 6 carreaux, il contient 3 carreaux.

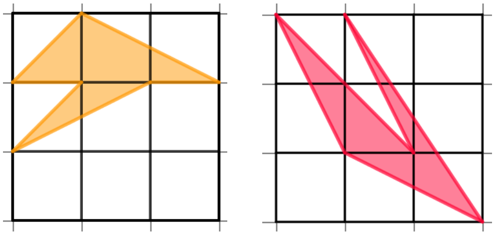
L'autre est la moitié d'un carré de 4 carreaux, il contient 2 carreaux.

Quand on a enlevé ces deux triangles, il reste le triangle bleu qui contient exactement 1 carreau (6 - 3 - 2).

On peut consacrer un temps à la recherche d'autres triangles contenant un demi-carreau, un carreau, un carreau et demi ou deux carreaux. L'affichage de ces nouveaux triangles facilite l'invention de nouveaux polygones et l'évaluation des aires.



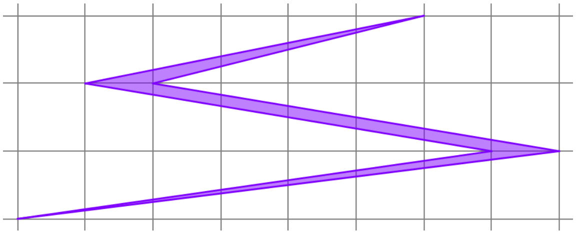
L'introduction de nouveaux triangles permet de découvrir de nouveaux polygones d'aire égale à 2.



Il est toujours possible de découper la figure en triangles.

Parfois, il est plus facile d'enlever de la grille complète (9 carreaux) les morceaux inutilisés. C'est le cas pour la figure rouge.

Si nous n'avions pas restreint la recherche à une grille de 9 cases, les possibilités seraient encore plus variées



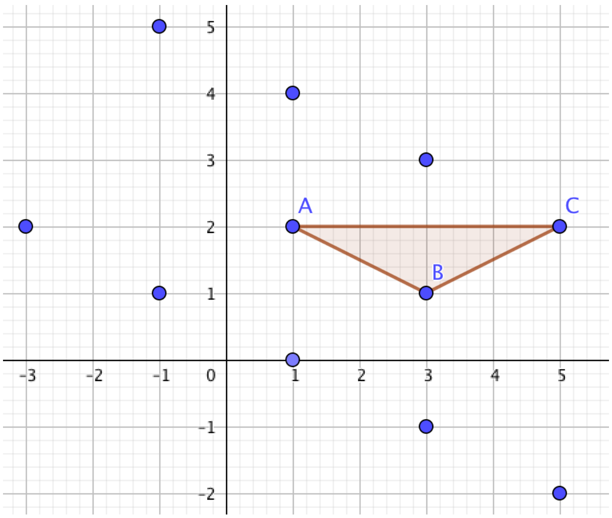
Éléments de preuve

Une façon de s'organiser pour obtenir la collection exhaustive des figures d'aire 2 obtenues avec des carreaux entiers ou les deux types de triangles du début est proposée en rubrique « compléments ».

Prolongements pour le cycle 4

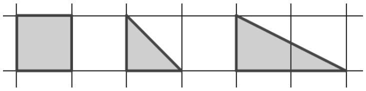
En fin de cycle 4, on peut supprimer la contrainte des 9 cases et chercher à caractériser les triangles ayant une aire de 2 carreaux.

Cette recherche est également intéressante en utilisant un repère : A et B étant donnés (coordonnées entières), trouver tous les points C de coordonnées entières tels que ABC ait une aire de 2 carreaux.

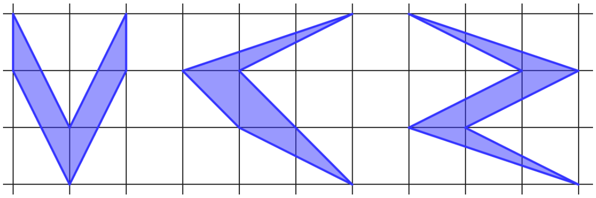


Complément

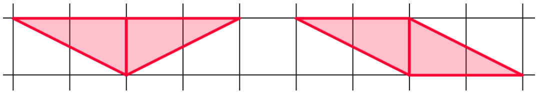
Nous avons répertorié ici seulement les figures dont l'aire est de deux carreaux et qui sont réalisables en assemblant les figures élémentaires suivantes :



Il existe de nombreuses figures dont l'aire est de deux carreaux qui ne sont pas réalisables ainsi, en voici trois exemples :

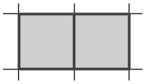


Nous avons par ailleurs exclu de cet inventaire les deux figures suivantes qui sortent du cadre (carré 3x3) dans lequel est posé le problème :

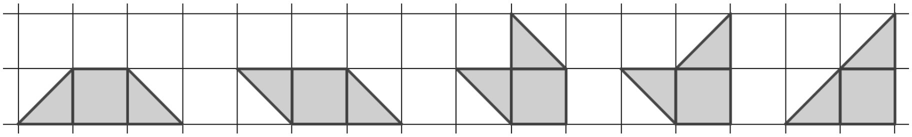


Enfin, quand une figure est réalisable de plusieurs façons elle ne figure qu'une fois dans l'inventaire. C'est le cas pour le rectangle de deux carreaux à l'aide de 2 carrés, d'un carré et deux petits triangles de 4 petits triangles ou de deux grands.

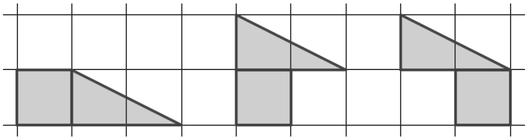
figures réalisées avec deux carreaux



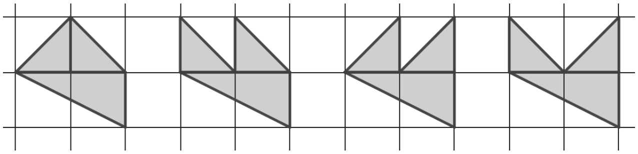
figures réalisées avec un carreau et deux petits triangles

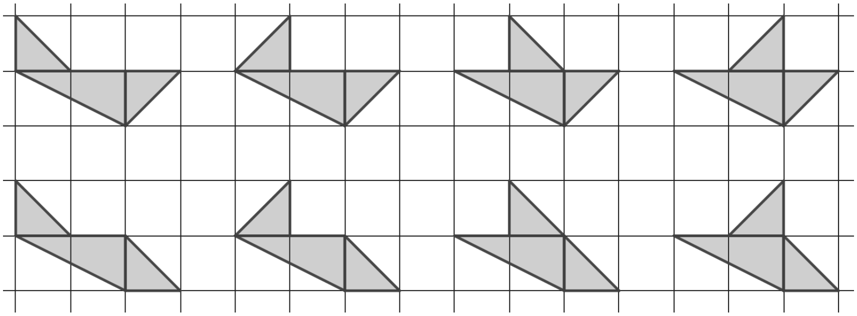


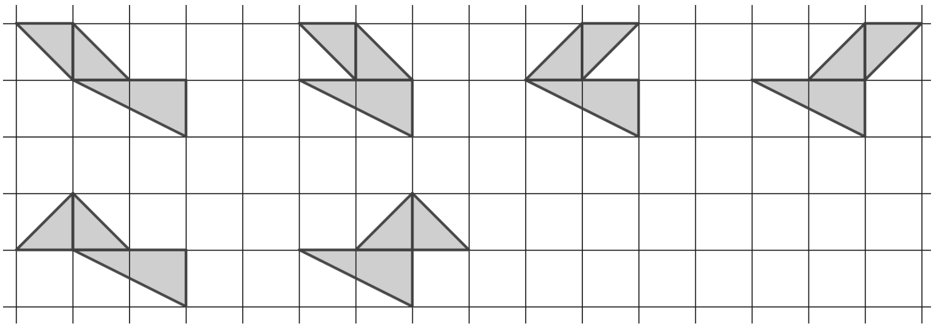
figures réalisées avec un carreau et un grand triangle

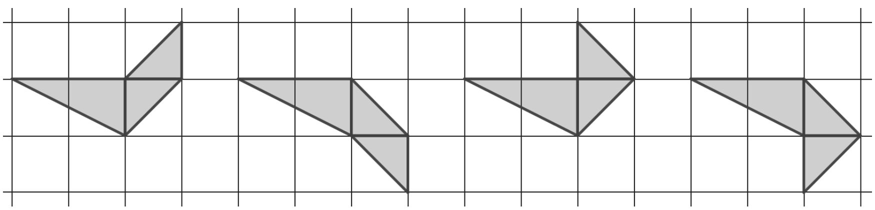


figures réalisées avec un grand triangle et deux petits

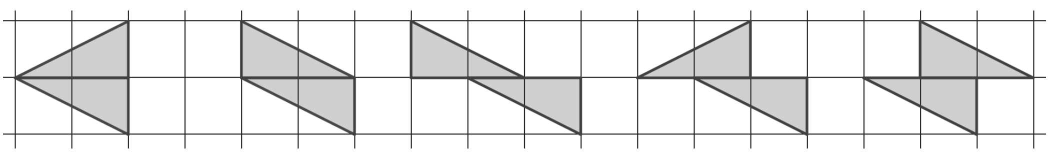








figures réalisées avec deux grands triangles



figures réalisées avec quatre petits triangles