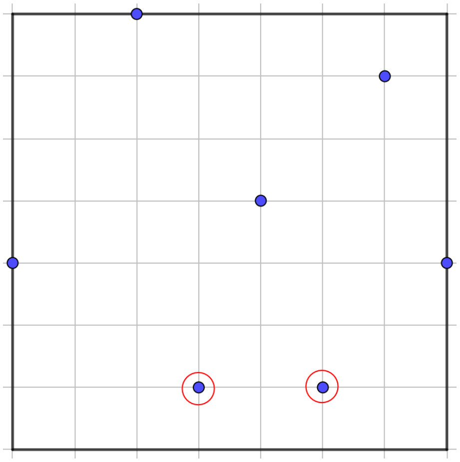
Pas trop près

En bref

Placer 7 points sur une grille puis chercher la plus courte distance entre deux de ces points.

On cherche à ce que cette plus courte distance soit aussi grande que possible.

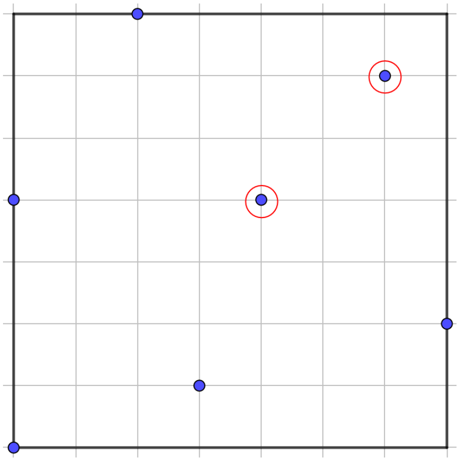
Introduction du problème



Sur cette grille, j'ai placé 7 points en essayant de ne pas les placer trop près les uns des autres.

Les deux points les plus près l'un de l'autre sont ceux que j'ai entourés.

Si vous reproduisez la même disposition sur votre grille, où les carreaux ont des côtés de 1 cm, ces deux points sont à 2 cm l'un de l'autre.

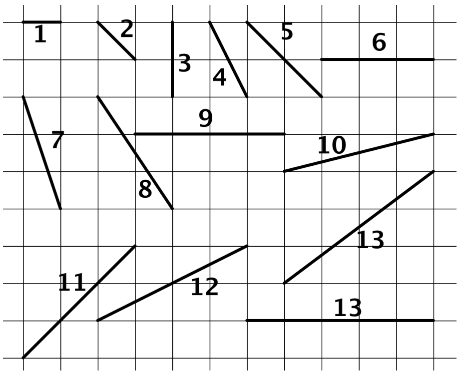


Sur cette nouvelle grille, les deux points les plus proches sont à environ 2 cm et 8 mm l'un de l'autre. Cette grille est donc meilleure que la précédente.

Le but est que les deux points les plus proches ne soient pas trop proches : s'ils sont à 3 cm l'un de l'autre, c'est mieux, et 4 cm encore mieux.

Éléments de relance

Pour éviter de mesurer à chaque fois, et pour permettre de continuer le travail sur un cahier ordinaire sans se soucier de la taille des carreaux, l'enseignante mesure (ou fait mesurer) au tableau une fois pour toutes différents segments tracés sur la grille. Un rangement par ordre de longueur croissante des différents segments est effectué. Chaque élève dispose ensuite d'un document analogue à celui qui suit : tous les segments de longueur inférieure ou égale à 5 côtés de carreau qu'on peut tracer sur la grille y sont présentés par ordre croissant de longueur.



Seule exception : les deux segments numérotés 13 ont la même longueur. L'enseignante précise que les longueurs de ces segments sont vraiment égales et pas seulement très proches. Elle peut demander aux élèves de lui faire confiance sur ce point. Une justification est possible en montrant qu'un carré ayant pour côté le segment « oblique » a une aire de 25 carreaux. Le côté de ce carré mesure donc exactement 5.

Éléments de preuve

La démonstration évoquée en prolongement pour le cycle 4 et détaillée dans la partie « compléments » nous semble trop difficile pour être abordée au cycle 3.

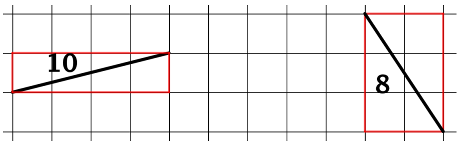
Aménagements pour le cycle 2

La feuille de comparaison des différents segments est distribuée aux élèves. L'enseignante demande de vérifier que sur cette feuille, les segments ont bien été numérotés du plus court au plus long.

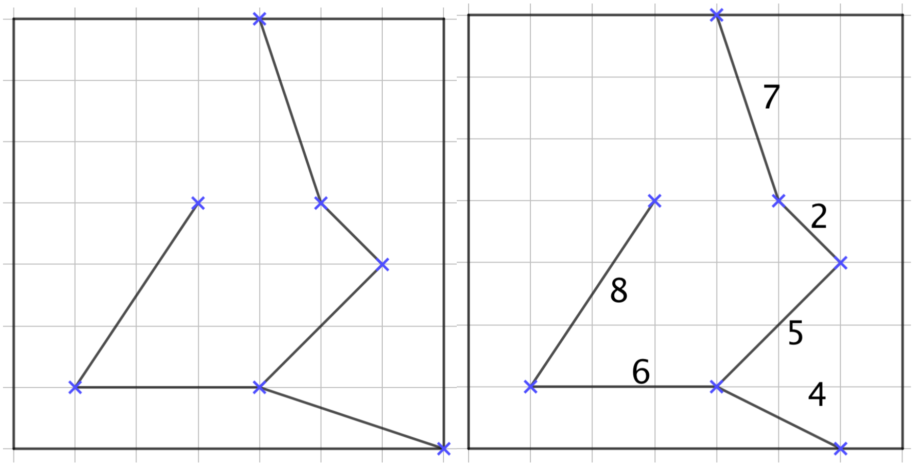
Elle explique que les segments qui ne sont pas tracés sur les lignes servent toujours de diagonale à un rectangle ou un carré tracé sur les lignes.

Le segment numéro 10 est la diagonale d'un rectangle de 4 carreaux de long et 1 de large.

Le segment numéro 8 est la diagonale d'un rectangle de 3 carreaux de long et 2 de large.



Sur une feuille sur laquelle différents segments sont tracés, elle demande de reporter pour chaque segment le numéro qui lui correspond.



Elle pose ensuite le problème.

Vous allez placer 7 points sur la grille.

Vous ferez attention de les placer pour qu'on ne puisse pas tracer de segment numéro 1. C'est assez facile, il suffit de ne pas placer deux points juste à côté l'un de l'autre.

Si avec vos 7 points on ne peut tracer ni segment numéro 1 ni segment numéro 2 c'est mieux.

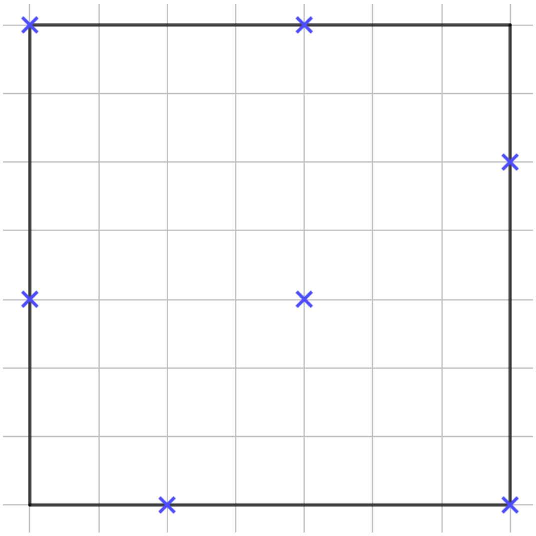
Si on ne peut pas tracer non plus de segment numéro 3, c'est encore mieux.

Et si on ne peut pas tracer de segment numéro 4. . .

Prolongements pour le cycle 4

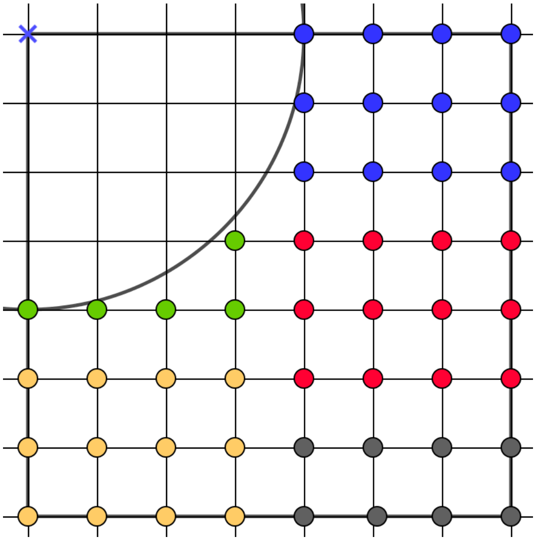
— Poser le même problème sur des grilles plus grandes.
— Sur la grille fournie, chercher à prouver qu'il n'existe pas de configuration dont la plus petite distance est supérieure ou égale à 4.

Complément



Voici une disposition De 7 points pour laquelle la distance la plus courte entre deux points est la diagonale d'un rectangle de 3 sur 2.

Dans la suite, nous appelons « configuration correcte » une configuration de 7 points meilleure que la précédente, c'est à dire dans laquelle la distance minimum mesure 4 ou plus de 4, l'unité étant le côté d'un carreau.

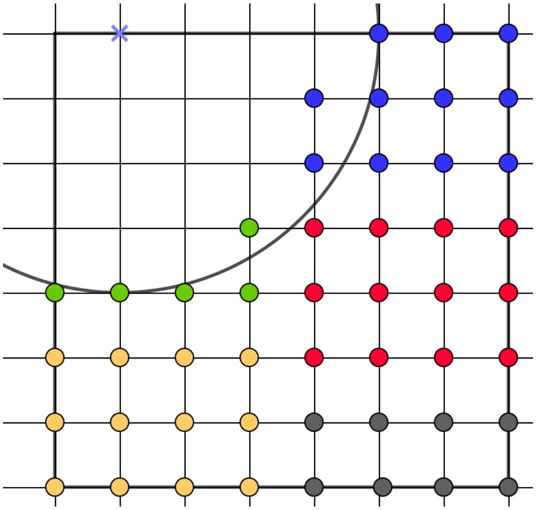


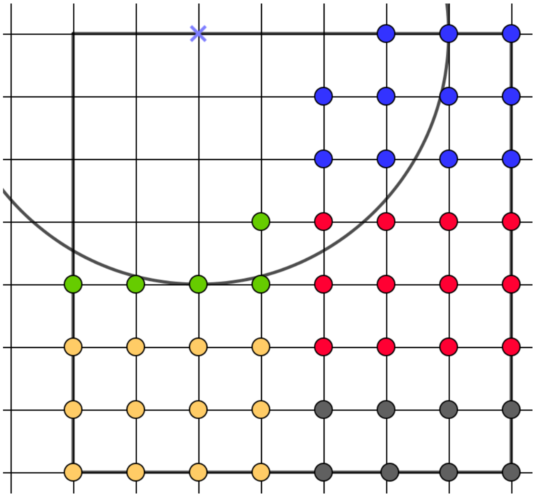
Supposons qu'un des 7 points est placé sur la croix bleue, tous les emplacements possibles des 6 autres points ont été marqués en gros et répartis en 5 couleurs.

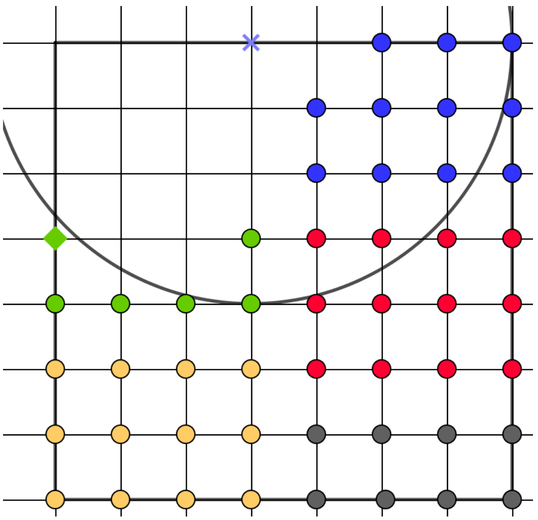
On ne peut choisir qu'un point dans chacune des couleurs car la distance entre deux points d'une même couleur est toujours inférieur à 4.

Il n'y a donc pas de configuration correcte utilisant la croix bleue (ou un autre coin).

On peut montrer étape par étape à l'aide des figures suivantes que tous les autres emplacements situés sur le bord sont également impossibles .







Supposons qu'il existe une configuration correcte de 7 points sans utiliser les lignes du bord.

Il suffit alors de faire glisser cette configuration d'une case vers le haut, ou au besoin de plusieurs cases pour obtenir une autre configuration correcte de 7 points avec cette fois un point au moins sur la ligne du bord.

Nous avons montré précédemment que c'est impossible, il n'existe donc aucune configuration correcte de 7 points.