

Le carré antimagique

En bref

Dans un carré magique, les sommes par ligne et par colonne doivent être égales. Ici au contraire elles doivent être toutes différentes et même éviter d'être proches.

Introduction du problème

13	1	5	10	29
8	3	12	6	29
7	9	16	14	46
4	2	15	11	32
32	15	48	41	

15 29 29 32 32 41 46 48

— J'ai écrit dans ce carré les nombres de 1 à 16 puis j'ai calculé la somme des nombres de chaque ligne et de chaque colonne. J'ai ensuite recopié les 8 résultats du plus petit au plus grand.

Pour obtenir un carré magique, il faudrait que les 8 résultats soient égaux. Nous en sommes loin.

Pour obtenir un carré antimagique, il faut que tous les résultats soient différents... en disposant les nombres comme je l'ai fait le carré n'est ni magique ni antimagique.

13	1	5	6	25
8	3	12	11	34
7	9	16	14	46
4	2	15	10	31
32	15	48	41	

15 25 31 32 34 41 46 48

Avec cette disposition, les 8 sommes sont différentes.

Pourtant, le carré n'est pas très antimagique.

Dans la liste des résultats, j'ai entouré les deux nombres qui sont les plus proches l'un de l'autre : 31 et 32 se suivent, il n'y a que 1 d'écart.

Pour que l'antimagic soit très forte, il faut que les deux nombres les plus proches dans la liste ne soient pas trop proches. Si les deux nombres les plus proches étaient 46 et 48 (écart de 2) ce serait mieux. Si les deux nombres les plus proches étaient 20 et 23 (écart de 3) ce serait encore mieux. . .

La consigne étant assez complexe, lors des premières mises en commun l'enseignante aide à vérifier que les propositions sont conformes aux consignes :

- Y a-t-il bien les 16 premiers entiers dans la grille ?
- Les sommes sont-elles exactes ?
- L'écart minimum annoncé est-il correct ?

3	1	5	10	19
8	9	12	6	35
7	16	13	14	50
4	2	15	11	32
22	28	45	41	

19 22 28 32 35 41 45 50

Voici un exemple où l'écart minimum est 3

Éléments de relance.

L'enseignante montre (ou rappelle si le problème « Des sommes pas trop grandes » a été étudié) qu'on peut parfois améliorer une grille en intervertissant deux nombres d'une même ligne ou d'une même colonne, ce qui évite de tout recalculer.

Éléments de preuve

La plus petite somme possible pour une ligne ou une colonne est $1+2+3+4 = 10$.

La plus grande somme possible pour une ligne ou une colonne est $13+14+15+16 = 58$.

- L'écart entre les deux nombres les plus proches peut-il être 20 ?

Comme le plus petit vaut au moins 10, le deuxième vaudrait au moins 30, le troisième au moins 50, le quatrième serait plus grand que 58. Ce n'est pas possible

- L'écart entre les deux nombres les plus proches peut-il être 12 ?

Comme le plus petit vaut au moins 10, les suivants vaudraient au moins : 22, 34, 46, 58, 70. . . Ce n'est pas possible.

- L'écart entre les deux nombres les plus proches peut-il être 7 ?

Comme le plus petit vaut au moins 10, les suivants vaudraient au moins : 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59. Ce n'est pas possible.

Le schéma suivant résume l'état des recherches d'une classe où la meilleure grille trouvée présente un écart minimum de 3 comme dans l'exemple qui précède.

1 2 3 4 5 6 ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~

L'enseignante fait le point :

— Pour l'instant, nous savons comment obtenir 3, vous savons qu'il est impossible d'obtenir 7, pour 4, 5 et 6 nous ne savons pas si c'est seulement difficile ou si c'est impossible.

Aménagements pour le cycle 2

Le but est difficile à expliquer (rendre maximum la plus petite des différences entre deux sommes successives !)

Nous déconseillons donc de poser ce problème en cycle 2, sauf si vous trouvez une formulation sensiblement plus simple que celle que nous proposons dans l'introduction.

Prolongements pour le cycle 4

Il ne nous semble pas utile de proposer un problème analogue sur une grille plus grande, la complexité étant bien suffisante sur une grille 4x4.

Une preuve qu'il est impossible d'obtenir un écart de 6 peut être recherchée avec les élèves... il n'est pas certain qu'elle aboutisse.

Compléments

4	2	8	5	19
7	3	12	11	33
6	1	16	14	37
10	9	15	13	47
27	15	51	43	

15 19 27 33 37 43 47 51

La plus petite différence entre deux sommes successives est ici 4.