

Bandes quadrillées

Les problèmes proposés dans cette situation consistent le plus souvent à trouver le nombre de cases au verso d'une bande de papier. Ils permettent de réinvestir dans un contexte légèrement différent et en posant des questions plus difficiles des connaissances acquises depuis le début de l'année :

- faits numériques
- propriétés des nombres travaillées particulièrement dans la situation "tours dessinées"
- fonctionnement du système décimal, travaillé particulièrement dans la situation "cartes à points".
- utilisation des signes $+$, $-$, $<$, $>$ et $=$.

Pour certains élèves, il faudra du temps pour se familiariser avec ce nouveau contexte. Dans les premières séances, certains problèmes qui ne paraissent pas très difficiles ne seront pas bien réussis.

Mais le contexte des bandes dessinées présente bien des similitudes avec le contexte des tours et celui des cartes à points précédemment utilisés, l'enseignant saisira toutes les opportunités pour montrer que les raisonnements utilisés dans ces contextes sont encore pertinents.

Matériel.

Pour l'enseignant : des bandes de différentes couleurs portant un nombre au recto et la quantité correspondante de cases toutes identiques (environ 2 cm de large) au verso.

Le nombre de carreaux est remplacé par un point d'interrogation quand la question consiste à trouver ce nombre.

Pour les élèves : Ardoise, brouillon quand l'enseignant le juge nécessaire.

Déroulement de la première séance

L'enseignant présente les bandes :

- Au dos de cette bande où il est écrit 10, il y a 10 carreaux.
- Sur cette bande, il est écrit 23, cela veut dire qu'il y a 23 carreaux au dos.

Pour chaque exemple, un élève vient au tableau compter les carreaux afin de vérifier qu'il y en a bien le nombre annoncé par l'enseignant.

Cette présentation est aussi brève que possible, mais tous les élèves doivent comprendre la règle de fabrication des bandes.

L'enseignant montre deux bandes portant le même nombre, les place l'une au-dessus de l'autre en faisant coïncider les extrémités pour montrer qu'elles ont la même longueur et dit :

— Les carreaux de toutes les bandes ont tous la même taille, alors, quand je prends deux bandes de 12 carreaux, elles ont la même longueur.



Si je prends deux bandes de 25 carreaux, elles ont la même longueur.

L'enseignant propose ensuite plusieurs des problèmes suivants.

Il n'est pas indispensable de les poser tous, mais il faut cependant veiller à maintenir un rythme soutenu : la première séance devrait proposer au moins trois problèmes différents.

Problème A

— Cette bande bleue est juste aussi longue que la bande rouge et la jaune mises bout à bout. Écrivez sur votre ardoise combien il y a de carreaux derrière la bande bleue.



Lors de la mise en commun, l'enseignant peut dire :

— Pour faire la bande bleue, il faut vingt carreaux comme sur la bande rouge et encore sept carreaux comme sur la bande jaune.

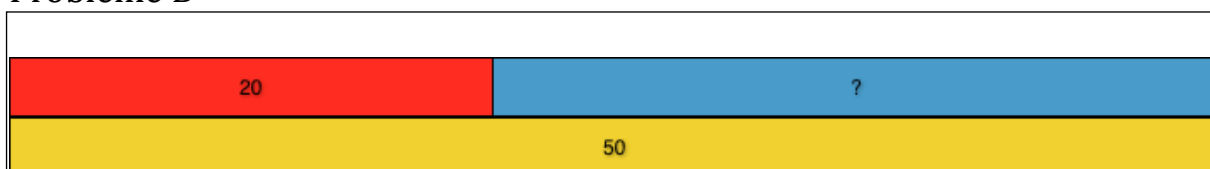
Vingt et encore sept, en écoutant bien on entend vingt-sept, il y a vingt-sept carreaux, je l'écris 27.

Je peux aussi penser que quand on écrit 20 (il l'écrit au tableau) ça veut dire deux groupes de dix. dans la bande bleue, il y a deux groupes de dix carreaux et encore sept carreaux, ça s'écrit 27. Il y a vingt-sept carreaux sur la bande bleue.

Il écrit au tableau $20 + 7 = 27$

La séance se poursuit avec les problèmes portant sur les dispositions de bandes qui suivent. À l'exception du problème D, la consigne est toujours "écrivez sur votre ardoise combien il y a de carreaux derrière la bande bleue".

Problème B



Lors de la mise en commun, l'enseignant peut dire :

— Cinquante (il écrit 50 au tableau) c'est cinq paquets de 10. La bande jaune est longue comme 5 petites bandes de 10 carreaux.

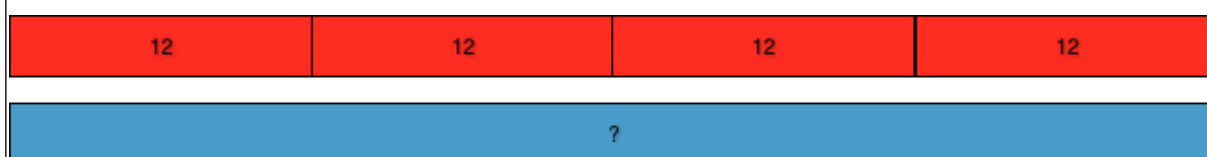
Il illustre en plaçant 5 bandes de 10 sous la bande 50.

— La bande de 20 carreaux est longue comme deux bandes de 10.

— Pour faire la bande bleue, il faut les trois autres bandes de 10. Le nombre de carreaux de la bande bleue s'écrit avec un 3 et un 0, il y a trente carreaux dans la bande bleue.

Il écrit au tableau $20 + 30 = 50$; $50 - 20 = 30$

Problème C



Lors de la mise en commun, l'enseignant peut dire :

— Une bande de douze carreaux, c'est comme une bande de dix carreaux et encore deux carreaux. En tout, dans les bandes rouges il y a quatre bandes de dix carreaux et encore huit carreaux (il écrit 48) il y a quarante-huit carreaux dans la bande bleue.

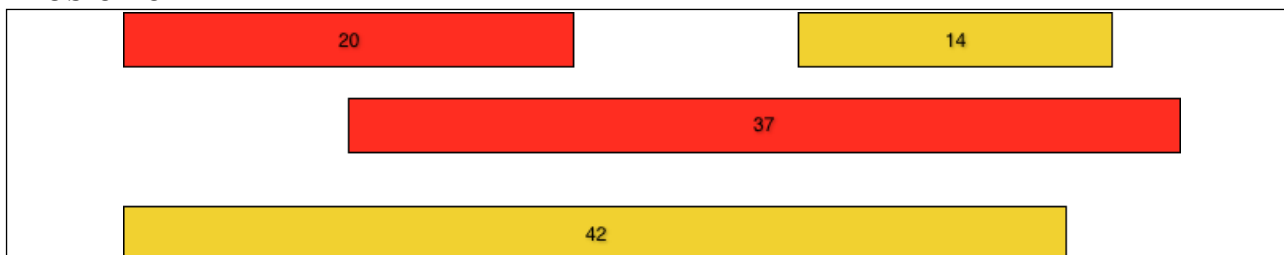
Il écrit au tableau $12 + 12 + 12 + 12 = 48$

Dans le contexte des bandes quadrillées, ce problème est traité comme les autres problèmes additifs, on n'évoque ni le concept de multiplication ni le signe x.

Dans la situation "vers la multiplication", les élèves seront amenés à comprendre que $4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4$ c'est autant que $12+12+12+12$.

S'ils savent calculer cette deuxième écriture du nombre avec aisance ils verront l'intérêt de l'utiliser à la place de la première. C'est pour cela que nous proposons ce problème ici.

Problème D



L'enseignant place des bandes au tableau comme ci-dessus.

— Je vais faire deux grandes bandes, une rouge avec les deux morceaux rouges et une jaune avec les deux morceaux jaunes. Quelle sera la bande la plus longue ?

Pour répondre, vous écrivez sur votre ardoise la couleur de la bande la plus longue.

Lors de la mise en commun, l'enseignant peut dire :

— Je compte tous les carreaux rouges, il y a deux groupes de dix ici et trois là, cela fait cinq groupes de dix. Cinq groupes de dix et encore sept carreaux, ça s'écrit comme ça (il écrit 57).

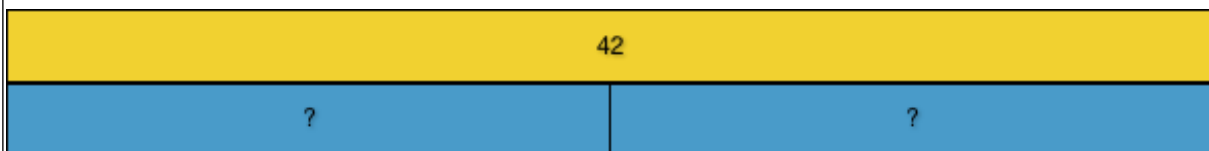
Je fais le même travail avec les carreaux jaunes : il y a cinq groupes de dix et encore six carreaux. Leur nombre s'écrit comme ça (il écrit 56).

Il y a cinquante-sept carreaux rouges et cinquante-six carreaux jaunes, la bande rouge sera plus longue que la jaune.

Il écrit au tableau : $20 + 37 > 42 + 14$ et demande aux élèves s'il est nécessaire de déplacer les bandes pour vérifier.

Problème E

Avant de poser le problème suivant, l'enseignant montre que les deux bandes bleues ont la même longueur, elles contiennent autant de carreaux.



Lors de la mise en commun, l'enseignant peut dire :

— Le nombre de carreaux jaunes s'écrit avec un 4 puis un 2 : la bande jaune est longue comme quatre bandes de dix carreaux et encore deux carreaux.

Je peux partager les bandes de 10 carreaux : il y en a 2 pour chaque bande bleue. Ensuite je mets un carreau tout seul de chaque côté (il écrit 21).

Sur chaque bande bleue, il y a vingt-et-un carreaux.

Il écrit au tableau $21 + 21 = 42$

Précisions sur le déroulement

Tous les problèmes de cette séance peuvent se résoudre en raisonnant de façon séparée sur les dizaines et sur les unités (il n'y aurait pas de retenue si on posait les opérations).

On conservera cette caractéristique pendant plusieurs séances, qui reprendront des problèmes proches des cinq exemples ci-dessus (sans bien sûr les reprendre toujours dans le même ordre ni proposer systématiquement chaque catégorie à chaque séance). Voici quelques exemples de valeurs qu'on peut utiliser pour cela.

Problème A : 30 ; 5 23 ; 3 20 ; 34 32 ; 5

Problème B : 48 ; 6 37 ; 20 56 ; 16 48 ; 21

Problème C avec 4 bandes : 21 11 22 avec 3 bandes : 32 23 33

Problème D 23 ; 31 vs 20 ; 34 43 ; 24 vs 51 ; 20 25 ; 42 vs 30 ; 30

Problème E 64 28 80 46

Les interventions de l'enseignant proposées pour chaque problème doivent être adaptées en fonction des capacités des élèves :

Prenons l'exemple de cette formulation que nous proposons pour le dernier problème.

—*Le nombre de carreaux jaunes s'écrit avec un 4 puis un 2 : la bande jaune est longue comme quatre bandes de dix carreaux et encore deux carreaux.*

Dans certaines classes cette formulation pourra à cette période être remplacée par : "*quarante-deux, c'est quatre dizaines et deux unités*" sans faire référence au matériel et en laissant aux élèves la responsabilité de se rappeler que cette affirmation repose sur une analyse de l'écriture en chiffres du nombre quarante-deux.

Dans d'autres classes au contraire il sera utile de soutenir la formulation proposée en l'illustrant comme ceci :

| | | | | |
|----|----|----|----|---|
| 10 | 10 | 10 | 10 | 2 |
| 42 | | | | |

Dans la plupart des classes, il y aura à la fois des élèves déjà capables d'utiliser des formulations abstraites et condensées et d'autres ayant encore besoin de plus d'étayage. Il revient à l'enseignant de jouer au mieux sur les différentes façons d'exprimer la même idée afin de permettre aux plus fragiles de progresser sans lasser les plus avancés.

Évolutions de la situation

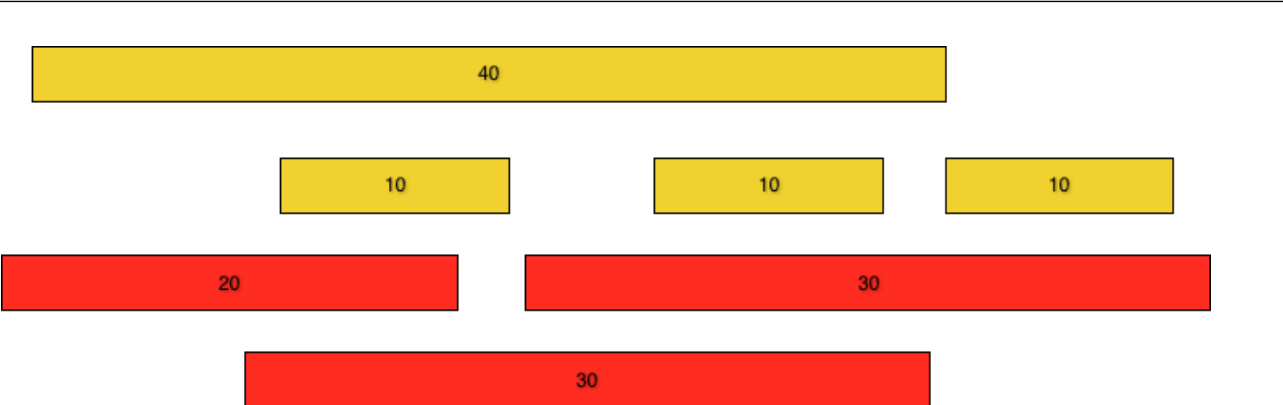
Des problèmes dont la réponse n'est pas un nombre

Dans la situation "tours dessinées", nous proposons des problèmes de comparaison pour éviter de réduire la résolution de problème au choix de la "bonne" opération.

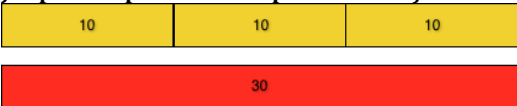
Des problèmes de comparaison peuvent également être utilisés dans le contexte des bandes quadrillées, comme le problème D ci-dessus.

En complément des problèmes de comparaison nous proposons ici deux autres familles de problèmes dont la réponse n'est pas un nombre. Ces problèmes ne constituent pas une étape de la progression, nous suggérons plutôt d'en parsemer les séances consacrées au contexte des bandes quadrillées, par exemple à raison d'un problème de cette catégorie toutes les deux ou trois séances.

Problème F




Avec ces bandes, je vais essayer de faire deux bandes de la même longueur, une jaune et une rouge.
je peux par exemple faire ça :



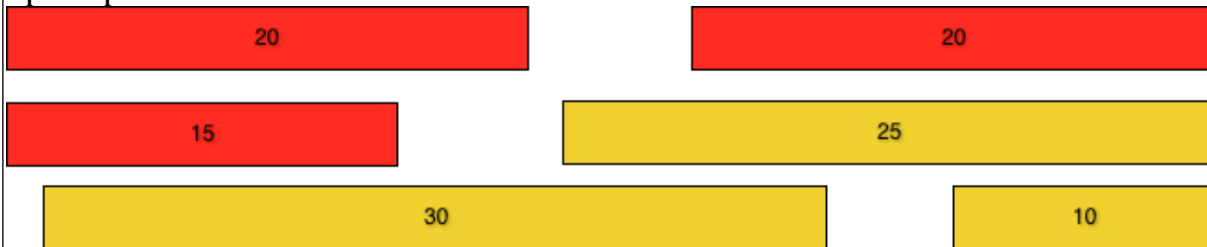
Si vous pensez à ces deux bandes, il faudra écrire $30 = 10 + 10 + 10$ sur votre ardoise pour dire que 3 bandes de 10 carreaux c'est comme 30 carreaux.

Il peut y avoir plusieurs solutions, je peux par exemple faire ça :



Écrivez sur votre ardoise une phrase mathématique qui dit que la bande rouge et la bande jaune ont autant de carreaux.

Je vais maintenant changer les bandes, à vous d'imaginer comment faire une bande rouge et une jaune de même longueur. Écrivez sur votre ardoise la phrase mathématique qui montre ce que vous avez trouvé, je fabriquerai les bandes après pour vérifier.



Lors de la mise en commun, l'enseignant privilégie l'appui sur le système décimal pour vérifier les phrases mathématiques proposées par les élèves : Si des élèves proposent $20 + 15 = 25 + 10$, il montre qu'il y a de chaque côté 3 groupes de 10 cases et 5 cases toutes seules.

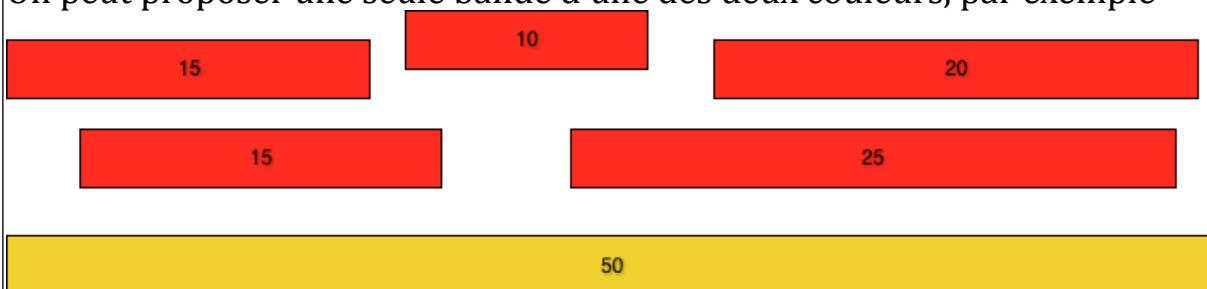
Comme toujours, la validation à l'aide des bandes n'est effectuée qu'en cas de doute persistant.

On ne cherche pas l'exhaustivité : si dans l'exemple ci-dessus aucun élève ne pense à proposer $30 + 25 = 20 + 20 + 15$, cela n'a pas d'importance.

Pour fabriquer de nouveaux problèmes de cette catégorie il suffit d'écrire une égalité entre deux sommes ou entre une somme et un nombre donné explicitement : $22 + 13 = 30 + 5$ ou $54 = 10 + 22 + 22$. On n'utilise que des sommes qui, si on devait poser une opération, ne demanderaient pas de retenue (on évite par exemple $25 + 17 = 30 + 12$). On découpe ensuite les bandes correspondant aux nombres figurant dans la phrase mathématique et on en rajoute une ou deux autres de chaque couleur.

Variante :

On peut proposer une seule bande d'une des deux couleurs, par exemple



Le nombre total de cases à obtenir étant fixé, il y a beaucoup moins de possibilités à explorer, on peut donc se permettre de proposer des valeurs numériques où il faut constituer des dizaines en groupant des unités comme ci-dessus.

Problème G

— Je plie cette bande de 16 carreaux en deux parties de même longueur, deux parties qui se recouvrent exactement puis je la déplie et je la retourne :
Le pli est juste sur un trait, entre deux carreaux.



— Je fais la même chose avec cette bande de 21 carreaux



Cette fois le pli est dans un carreau.

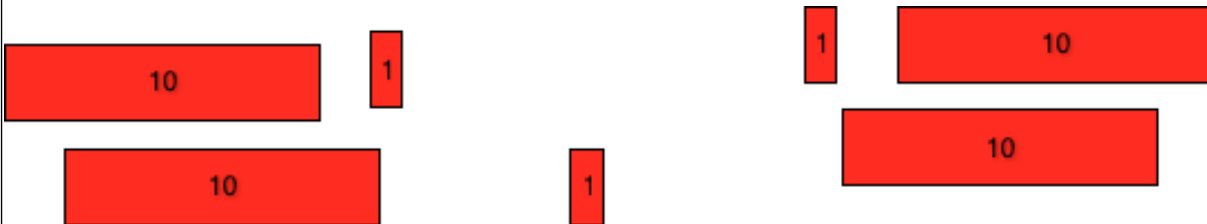
L'enseignant laisse au tableau les deux bandes, côté quadrillé visible. Il écrit "Trait" sous la première, "Carreau" sous la deuxième.

Je vais faire la même chose avec cette bande, de 43 carreaux. Où sera le pli ?
Si vous pensez qu'il sera sur un trait, écrivez T comme Trait sur votre ardoise, si vous pensez qu'il sera dans un carreau écrivez C comme Carreau sur votre ardoise.

On peut se contenter d'utiliser des bandes ayant un nombre pair de dizaines : 43, 62, 80, 27 ou 44.

Lors de la mise en commun pour le problème avec une bande de 43 carreaux, l'enseignant peut dire et montrer ceci :

— 43 cases, c'est 4 groupes de 10 cases et encore 3 cases. Pour partager en deux parties égales, je peux mettre 2 groupes de 10 cases et encore une case de chaque côté comme ceci :



Il reste une case, je ne peux la mettre ni d'un côté ni de l'autre, sinon les groupes ne seraient pas égaux.

Pour faire deux groupes égaux, je suis obligé de couper cette case en deux et de mettre une moitié de case de chaque côté, c'est pour ça que le pli sera juste au milieu de la case.

Si les élèves réussissent ces problèmes avec aisance on pourra introduire des cas comme 54 ou 36 dans lesquels, pour conclure, il faut partager une dizaine en deux bandes de 5.

Augmentation du nombre de bandes.

On introduira des situations plus complexes de façon très progressive, par exemple dans une séance trois problèmes simples ressemblant fortement à des problèmes déjà traités dans les séances antérieures et un problème plus délicat suivi éventuellement d'un deuxième presque identique permettant aux élèves de réinvestir immédiatement les idées développées lors de la mise en commun suivant le premier.

La présence d'un plus grand nombre de bandes rend le problème plus difficile parce qu'il y a des choix à faire (le nombre de procédures significativement différentes est beaucoup plus grand). Il faut souvent conserver en mémoire ou sur le papier des résultats intermédiaires. Les élèves disposeront donc, en plus de l'ardoise destinée à montrer son résultat, de papier brouillon.

Pour ces problèmes, il n'est jamais nécessaire de regrouper des unités pour constituer de nouvelles dizaines, ni de dissocier des dizaines. Cela sera proposé plus loin.

Problème A2

| | | | |
|----|----|----|----|
| 12 | 13 | 11 | 13 |
| ? | | | |

Pour l'exemple ci-dessus, on peut prendre en compte simultanément les 4 bandes rouges, ou bien les grouper d'abord deux à deux, ou encore les ajouter une à une.

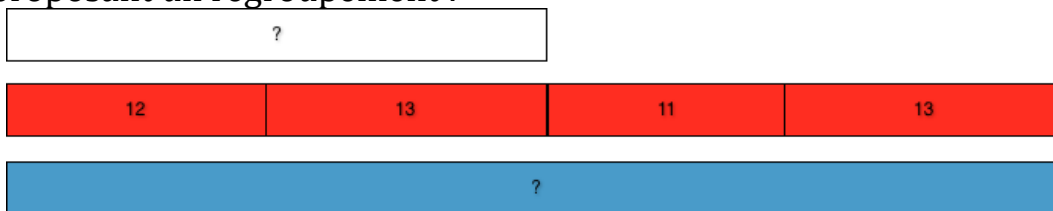
Tous les élèves ne trouveront pas spontanément la réponse correcte dès le premier problème de ce type, il importe de présenter ces problèmes comme des énigmes difficiles à résoudre : ne pas trouver n'est pas un échec, en revanche trouver la solution est un exploit.

L'enseignant n'hésite pas à suggérer des procédures, par exemple en décomposant l'une des bandes :

| | |
|----|---|
| 10 | 2 |
|----|---|

| | | | |
|----|----|----|----|
| 12 | 13 | 11 | 13 |
| ? | | | |

ou en proposant un regroupement :



Il peut aussi déplacer les bandes rouges, mettant en œuvre implicitement le fait que la somme de plusieurs nombres ne dépend pas de l'ordre dans laquelle on la calcule :

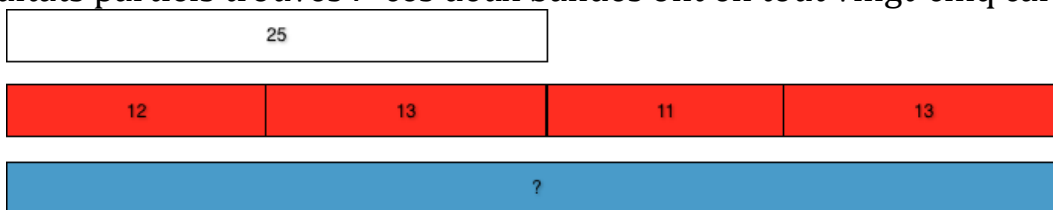


Ce déplacement ne suggère pas de procédure significativement différente, mais il nous semble utile de ne pas attendre que le déplacement des bandes permette des économies de calcul pour le proposer.

Ce problème ne diffère du problème C où on cherche la longueur totale de 4 bandes de 12 carreaux que par la possibilité de choisir différents regroupements de deux bandes.

Quelle que soit la procédure décrite par l'enseignant, il ne se contente pas d'énoncer des opérations "douze plus treize égal vingt-cinq".

Il explicite la décomposition décimale utilisée : "dans cette bande il y a un groupe de dix cases et encore deux cases, dans celle-ci..." et reporte au tableau les résultats partiels trouvés : "ces deux bandes ont en tout vingt-cinq carreaux"



Exemples de valeurs possibles pour des problèmes proches :

20 ; 12 ; 15 21 ; 22 ; 13 ; 11 22 ; 4 ; 21 ; 10 13 ; 11 ; 41 ; 32

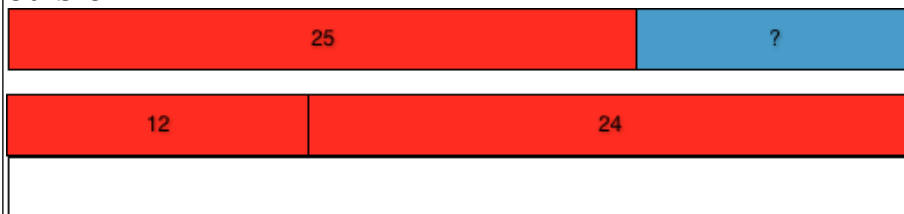
Problème B2



Comme pour le problème A2, l'enseignant ne doit pas s'attendre à ce que ses élèves résolvent spontanément ce type de problème dès le premier exemple. Il n'hésitera pas à suggérer fortement des procédures :



ou bien



ou encore :



Exemples de valeurs possibles pour des problèmes proches :

36 ; ? vs 25 ; 23 18 ; ? vs 26 ; 22 25 ; ? vs 13 ; 34
14 ; 12 ; ? vs 38 22 ; 13 ; ? vs 39 16 ; 21 ; ? vs 57

Des valeurs numériques obligeant à constituer ou décomposer des dizaines.

Problème A3

| | |
|----|----|
| ? | |
| 21 | 19 |

La procédure privilégiée consiste à regrouper les unités de 21 et de 19, pour former une nouvelle dizaine. Il y a alors 4 dizaines de cases et aucune case isolée, le nombre de cases s'écrit avec un 4 et un 0, il y a 40 cases.

L'enseignant évoque la situation "cartes à points" où on a fait souvent de tels regroupements. Il aide les élèves à imaginer le groupement effectué en complétant le schéma du tableau :

| | | | |
|----|---|----|---|
| ? | | | |
| 21 | | 19 | |
| 20 | 1 | 10 | 9 |

D'autres procédures sont possibles :

Si j'enlève une case à la bande de 21 et que je la mets avec celle de 19, j'aurai deux bandes de 20.

Exemples de valeurs possibles pour des problèmes proches :

25 ; 5 9 ; 11 15 ; 15
11 ; 19 32 ; 8 25 ; 15
22 ; 28 14 ; 26 37 ; 13

On privilégie les décompositions de 10 les mieux connues : 5 et 5, 9 et 1.

On remplacera rapidement les problèmes A3 par A4 et A5, qui demandent également de regrouper des unités pour former une dizaine, mais ne suggèrent pas de façon aussi forte le regroupement à opérer.

On n'oubliera pas de continuer à proposer en alternance des problèmes plus faciles.

Problème A4



L'assemblage de deux des trois bandes permet toujours d'obtenir des dizaines entières

Exemples de valeurs possibles pour des problèmes proches :

25 ; 5 ; 12 18 ; 9 ; 11 15 ; 13 ; 15
11 ; 12 ; 19 22 ; 7 ; 13 16 ; 21 ; 14

Problème A5



Les nombres proposés ne suggèrent pas de regroupement évident pour former une dizaine.

L'enseignant pourra utiliser trois points d'appui :

- Le retour aux constellations :

Plaçons les 7 cases de la bande 17 et les 8 cases de la bande 28 comme sur des dés :



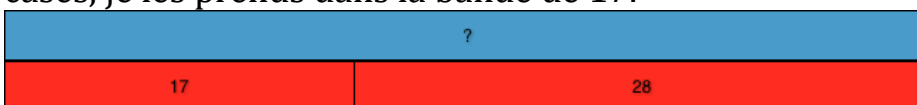
On peut aussi les placer comme ça :



Dans les deux cas, un regroupement ou un déplacement de cases permet de montrer que 8 et encore 7 c'est aussi 10 et encore 5.

- Le découpage des bandes :

Pour faire une dizaine en utilisant les 8 cases de la bande 28, il faut ajouter 2 cases, je les prends dans la bande de 17.



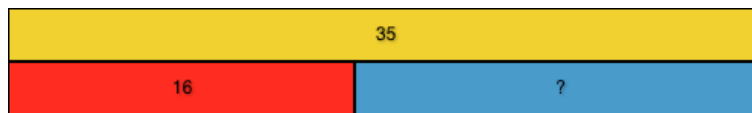
- L'appui sur le fait numérique "8 + 7 = 15"

Si ce résultat est mémorisé, son utilisation conduit à une procédure économique et proche de ce qui deviendra la technique d'addition posée : 8 + 7 c'est 15, c'est-à-dire une dizaine et 5 unités. Il y a en tout 4 dizaines : celle de 17, les deux de 28 et celle de 15. Le nombre de cases s'écrit 45.

Exemples de valeurs possibles pour des problèmes proches :

25 ; 17 18 ; 16 19 ; 24
17 ; 19 24 ; 8 36 ; 26

Problème B3



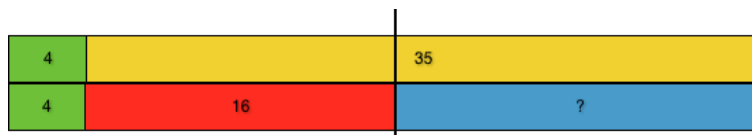
Ce problème est difficile car, même si les élèves réussissent à traduire la situation par une de ces écritures symboliques : $16 + ? = 35$ ou $? = 35 - 16$, ils ne disposent pas de la technique opératoire pour conclure.

Voici trois suggestions d'action sur le schéma que l'enseignant peut faire :

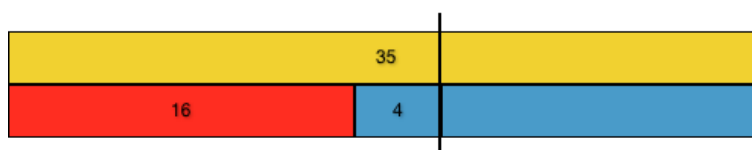


Ce découpage peut être évoqué par les écritures symboliques suivantes :

$35 = 20 + 15$ $16 = 15 + 1$ $20 - 1 = 19$



L'ajout de 4 carreaux aux deux bandes peut conduire aux écritures symboliques suivantes : $16 + 4 = 20$ $35 + 4 = 39$ $20 + 19 = 39$



Ce redécoupage peut être traduit par ces écritures :

$16 + 4 = 20$ $35 = 20 + 15$ $15 + 4 = 19$

Exemples de valeurs possibles pour des problèmes proches :

42 vs 18 ; ? 33 vs 7 ; ? 32 vs ? ; 14

27 vs ? ; 19 31 vs 14 ; ? 54 vs 25 ; ?

Problèmes écrits

Quand certains problèmes sont résolus avec aisance par la plupart des élèves et si le niveau de lecture le permet, l'enseignant peut poser certains problèmes sous forme de texte au lieu de montrer les bandes. Il le fait avec parcimonie, un problème posé sous forme de texte toutes les trois séances par exemple, afin de conserver un rythme de travail soutenu.

Au moment de la mise en commun, l'enseignant place au tableau les bandes décrites dans l'énoncé.

Exemples de problème :

Une bande bleue est longue comme deux bandes rouges bout à bout.

Une bande rouge a 15 carreaux.

L'autre bande rouge a 12 carreaux.

Combien de carreaux a la bande bleue ?

Une bande bleue et une rouge sont bout à bout.

À elles deux elles sont aussi longues qu'une bande jaune de 46 carreaux.

La bande rouge a 30 carreaux.

Combien de carreaux a la bande bleue ?

Je fais une grande bande rouge avec une bande de 23 carreaux et une de 26 carreaux.

Je fais une grande bande bleue avec une bande de 12 carreaux, une de 13 carreaux et une de 22 carreaux.

Quelle grande bande sera la plus longue, la bleue ou la rouge ?

Je mets bout à bout deux bandes bleues de la même longueur.

À elles deux, elles sont juste aussi longues qu'une bande rouge de 48 carreaux.

Combien de carreaux a une bande bleue ?