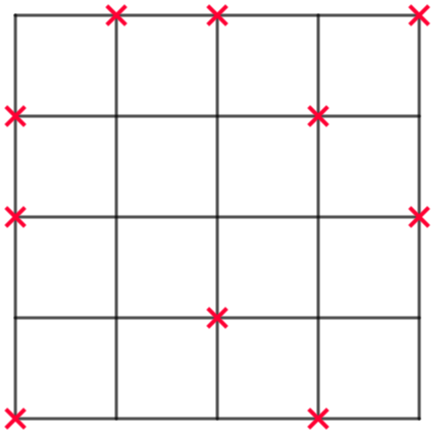
No three in a line

En bref

Placer le plus possible de points sur les intersections d'une grille carrée sans jamais former un alignement de trois points.

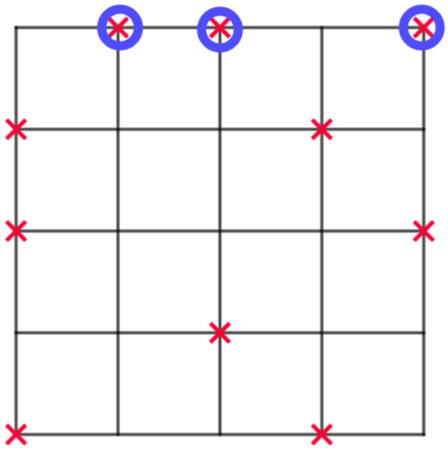
Introduction du problème

Je place des points sur les intersections de cette grille :



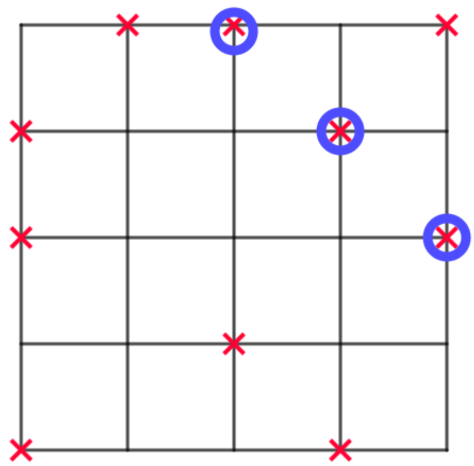
Dans ce problème on ne peut pas placer les points n'importe où : n'a pas le droit de placer trois points alignés.

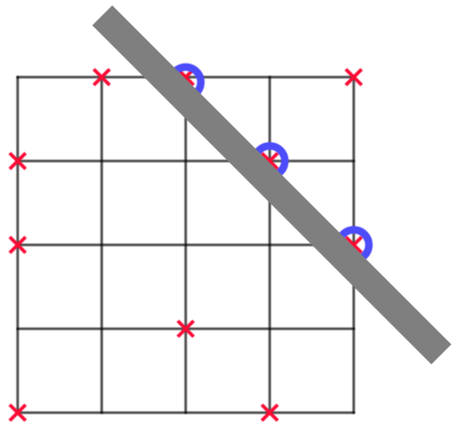
Les points que j'ai placés ne conviennent pas parce que les trois points entourés sont alignés :



Cet exemple montre qu'en mathématique le mot « aligné » n'a pas le même sens que dans des jeux comme « puissance 4 » ou le « morpion ». Des intersections peuvent être alignées même si elles ne suivent pas sur la grille.

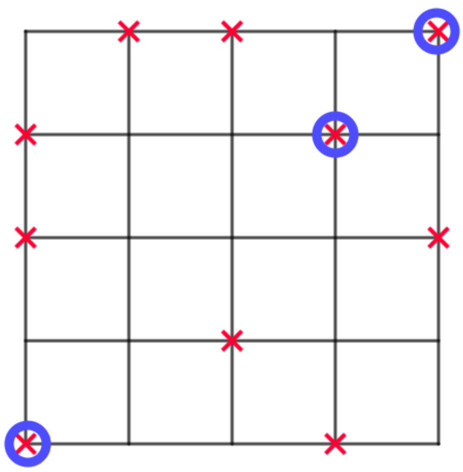
D'ailleurs ces trois points aussi sont alignés :



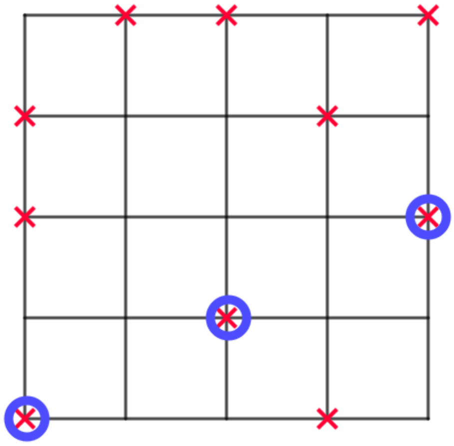


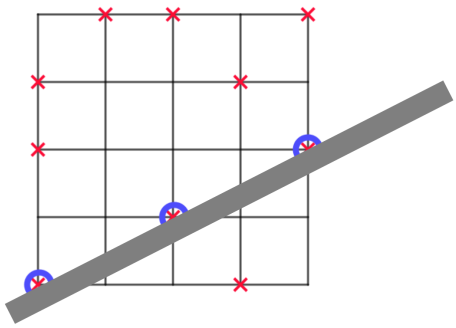
Cet exemple montre que trois points peuvent être alignés sans être situés sur une même droite déjà tracée : ils sont alignés parce qu'on peut tracer une droite qui passe par les trois points. Pour le vérifier, on peut tracer la droite ou simplement poser une règle : si le bord de la règle passe par les trois points, ils sont alignés.

Ces trois points sont également alignés :



Ces trois points sont alignés même bien que ce soit un peu plus difficile à voir





Essayez maintenant de faire mieux que moi : vous devez placer le plus possible de points sur la grille sans qu'il y ait trois points alignés.

L'enseignante fournit des feuilles comportant chacune une douzaine de grilles afin que les élèves fassent de nombreux essais.

Éléments de relance

Lors des mises en commun, l'enseignante demande aux élèves qui pensent avoir placé beaucoup de points sans en aligner trois de reproduire en grand format leurs réalisations (directement au tableau ou sur des feuilles qu'elle fournit). La classe cherche s'il y a des alignements de trois points sur les affichages. Si certains alignements ne sont vus par aucun élève, l'enseignante les montre. Elle insiste sur l'importance de vérifier s'il y a des alignements ressemblant au dernier exemple ci-dessus, les plus difficiles à voir

La conclusion d'une séance est : nous savons placer 9 points (ou 8, ou 10) sur la grille sans faire d'alignement de trois points. Nous ne savons pas s'il est possible de faire mieux.

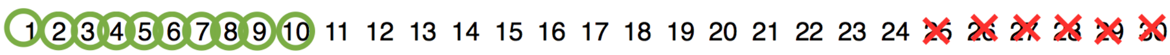
Éléments de preuve

L'enseignante rappelle que la classe sait placer 10 points sans alignement de 3 points, mais qu'elle ne sait pas en placer 11.

Elle reproduit au tableau le schéma qui suit et le commente :

— les ronds verts signifient qu'on a réussi à placer ce nombre de points.

— les croix rouges signifient que même un grand savant ne peut pas le faire (il ne peut pas placer 26 points ou plus parce qu'il n'y a que 25 places, et s'il en place 25 en marquant toutes les intersections de la grille il y a beaucoup d'alignements de trois points).



Elle pose la question suivante : 11 n'est ni en vert ni en rouge, qu'en pensez-vous ? Placer 11 points est seulement très difficile ou bien c'est complètement impossible (même un grand mathématicien professionnel ne pourra jamais réussir) ?

Après avoir laissé un court moment de réflexion, elle fait un sondage pour connaître l'avis des élèves sur cette question, en insistant sur le fait qu'il ne s'agit pas d'un vote :

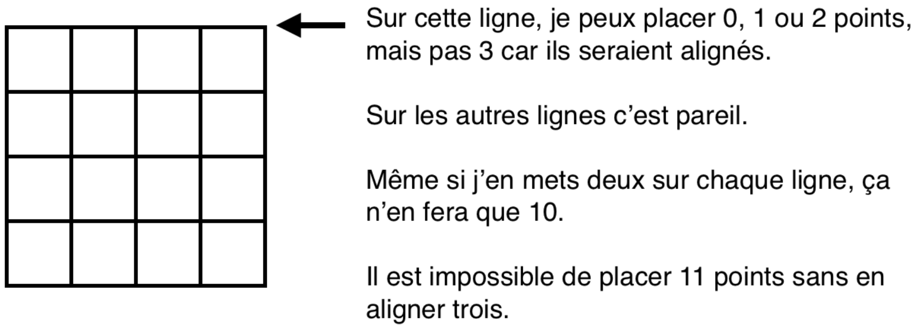
— Je veux juste savoir ce que vous en pensez, mais en mathématique ce ne sont pas forcément les plus nombreux qui ont raison. Si j'avais posé la même question quand nous savions placer seulement 9 points, certains auraient peut-être pensé qu'il était impossible de faire 10. . . ils auraient eu tort.

Il y a deux façons de trancher cette question :

Soit quelqu'un réussit à placer 11 points.

Soit quelqu'un explique POURQUOI c'est impossible.

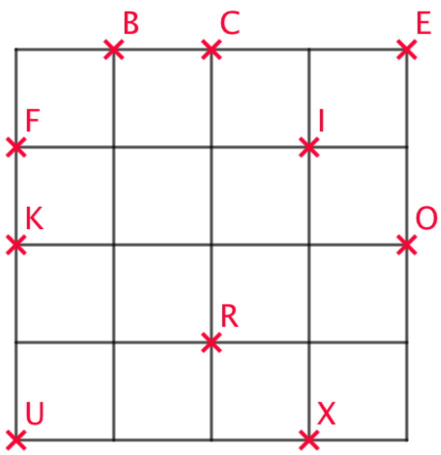
Après un nouveau temps de réflexion, l'enseignante donne la parole aux élèves qui pensent pouvoir fournir une explication. Elle aide à reformuler, étaie, et fournit si nécessaire elle-même une preuve qui peut ressembler à ceci :



Aménagements pour le cycle 2

Le concept d'alignement est difficile, il nous semble préférable en cycle 2 proposer le travail suivant avant le problème « no three in a line ».

Une grille est affichée par l'enseignante. Des points numérotés sont placés sur certaines intersections de la grille, ils forment plusieurs alignements de trois points. Chaque élève dispose d'une version réduite de la même grille.



Les élèves cherchent des groupes de trois points alignés. Quand ils en trouvent un, ils notent les lettres désignant les trois points. Pour la mise en commun, un élève écrit au tableau les noms des trois points qu'il juge alignés. Après échange, l'enseignante ou un élève va au tableau vérifier à l'aide de la règle s'il y a ou non alignement.

Quand les élèves reconnaîtront même les alignements les plus difficiles, l'enseignante pourra poser le problème « no three in a line ».

Remarque : il arrivera peut-être qu'un élève remarque un alignement de deux points qu'il juge difficile. Cela mérite de s'y arrêter un peu et de faire remarquer que deux points sont toujours alignés, même si on en prend un dans la classe et l'autre sur Mars, comme l'avait fait remarquer un élève dans une des classes où nous avons testé ce problème.

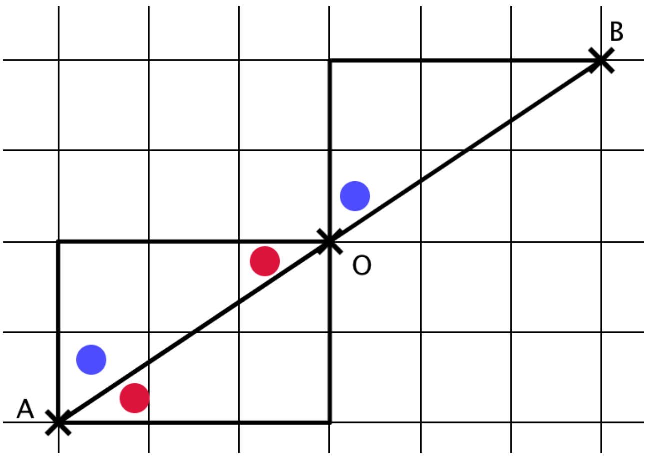
Prolongements pour le cycle 4

Il est intéressant de pousser le problème jusqu'à une grille de 7 lignes et 7 colonnes, car des triplets de points peuvent alors être alignés dans des directions nouvelles.

Pour les dimensions de grilles utilisées, si les cases ne sont pas trop petites, la règle suffit à conclure sans ambiguïté dans les cas où il n'y a pas alignement. En revanche l'enseignante peut instiller un doute sur les cas d'alignement : la règle semble bien passer par les trois points… mais est-ce vraiment sûr ? S'il y avait un écart d'un dixième de millimètre, le verrait-on ?

Selon le niveau de classe, la preuve de l'alignement peut s'appuyer sur différentes connaissances.

Nous aimons bien la preuve qui, en s'appuyant sur la figure suivante, montre que l'angle $A\hat{O}C$ est plat, car elle est compréhensible dès l'école élémentaire.



Compléments

Ce problème a été étudié par des mathématiciens professionnels.

Ils ont montré que placer 2n points sur une grille nxn sans faire d'alignement de 3 points n'est possible que pour des « petites » grilles. Pour plus de détail, on peut consulter cette page wikipédia : https ://en.wikipedia.org/wiki/No-three-in-line_problem