

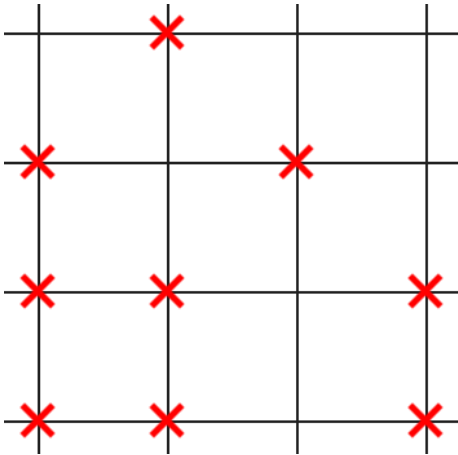
Pas de carré

En bref

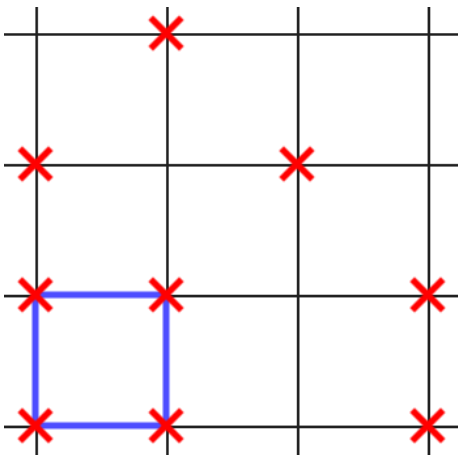
Placer sur les nœuds d'une grille le plus possible de points sans que quatre points soient situés aux sommets d'un carré

Introduction du problème

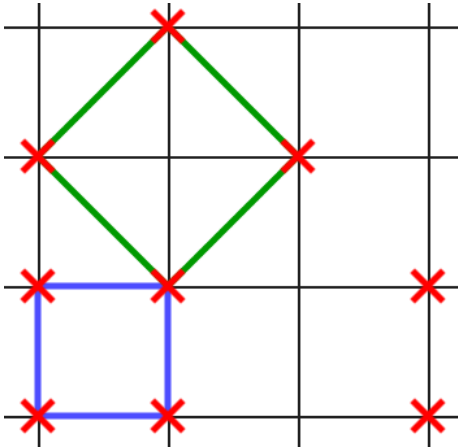
Nous allons chercher à tracer des carrés en joignant les points placés sur cette grille.



Un élève volontaire vient au tableau tracer un carré, probablement celui-ci :

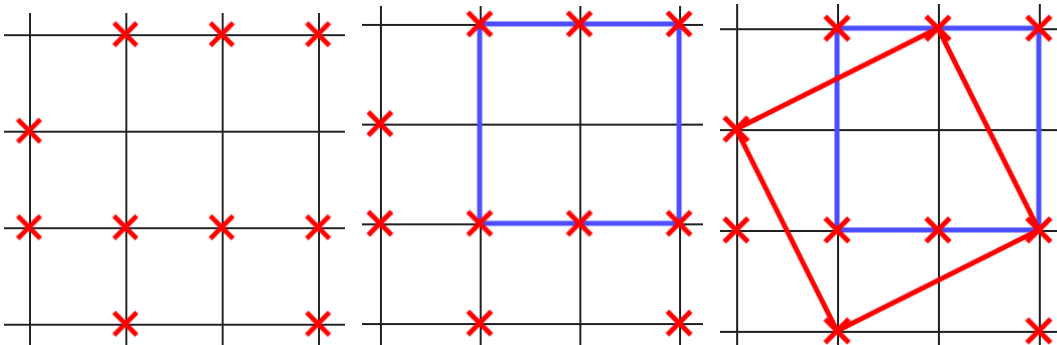


Après un moment de réflexion, si aucun élève ne le propose, l'enseignante trace elle-même le second carré possible.



Elle consacre le temps nécessaire à convaincre les éventuels réticents que cette figure est bien un carré : ses 4 côtés ont la même longueur et ses 4 angles sont droits.

Le même travail est repris avec d'autres dispositions de points :



Dans le problème que je vais vous poser, il faudra faire bien attention aux carrés inclinés comme le carré vert ou le carré rouge. Ils sont plus difficiles à voir mais ce sont quand même des carrés.

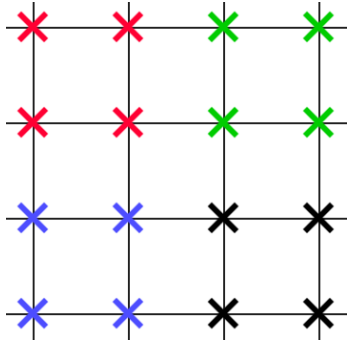
Voici le problème : vous devez placer des points sur les nœuds de la grille, mais on ne doit pas pouvoir tracer de carré en utilisant les points que vous avez placés.

Le but est de placer le plus possible de points sans qu'on puisse faire un carré.

Éléments de relance

L'enseignante organise des mises en commun pendant lesquelles les propositions comportant un grand nombre de points sont affichées et étudiées. Au début de la recherche surtout, les propositions comporteront fréquemment un des deux carrés dont les côtés ne suivent ni les lignes ni les diagonales des carreaux de la grille. L'enseignante insistera pour que les élèves vérifient l'absence de ces carrés (il n'y en a que deux possibles sur la grille utilisée) avant de reproduire leur proposition pour la classe.

Éléments de preuve



Si on n'enlève pas un des points rouges, il y aura un carré rouge.

Pour qu'il n'y ait pas de carré, il faut donc enlever au moins un point rouge, un vert, un bleu et un noir.

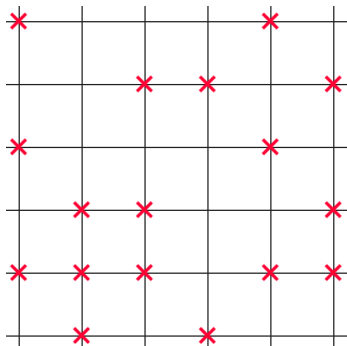
Il est donc impossible de placer plus de 12 croix sans former de carré.

En entourant en vert les nombres de croix que l'on a réussi à placer et en barrant en rouge ce qu'on sait impossible, le schéma suivant peut représenter ce que sait une classe après une recherche sérieuse : cette classe n'a pas réussi à placer 12 croix, ni 11 croix, mais elle n'est pas certaine que c'est impossible.

7
8
9
10
 11 12 ~~13~~ ~~14~~

Aménagements pour le cycle 2

Après une introduction identique à celle proposée pour le cycle 3, demander de tracer le plus possible de carrés ayant pour sommets des points déjà placés sur une grille.



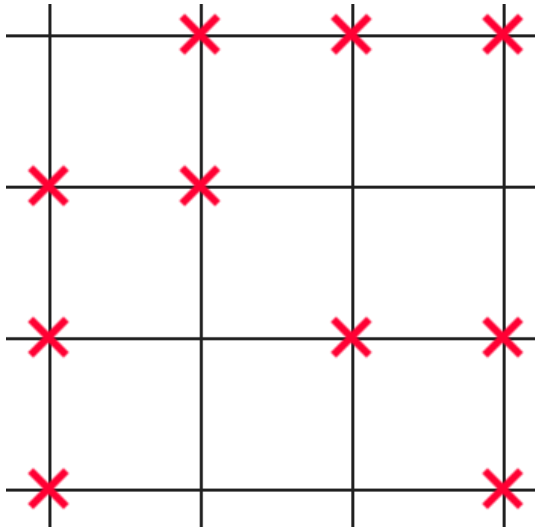
Prolongements pour le cycle 4

Augmenter la taille de la grille

Prouver qu'il est impossible de placer 12 points sans former de carré.

Compléments

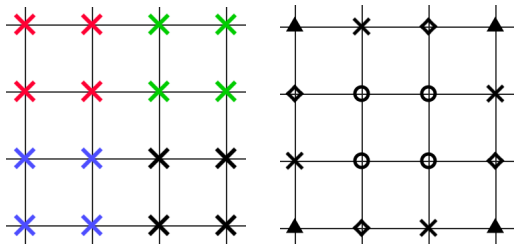
Voici une disposition de 10 points qui ne forment aucun carré.



Comment prouver qu'il est impossible de placer 12 points sans former de carré.

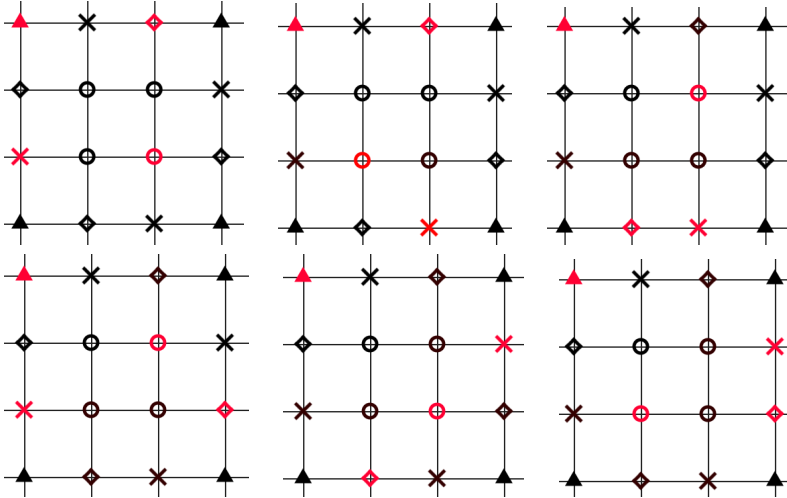
Cette preuve est indiquée ici à l'usage des enseignants curieux ou pour les classes de cycle 4. Elle nous paraît trop difficile pour l'école élémentaire.

Pour avoir 12 points sans carré, il faut enlever un point dans chacun des 4 carrés de couleur du schéma de gauche, il faut également en enlever un dans chacune des familles marquées d'un même signe du schéma de droite.



Il faut donc enlever le point marqué d'un triangle dans l'une des couleurs, le point marqué d'un carré dans une autre couleur, celui marqué d'un rond dans une troisième couleur et celui marqué d'une croix dans la quatrième. . . Le nombre de cas à tester n'est pas très élevé, en les étudiant tous on obtiendra un des deux résultats suivants :

- L'un des cas étudiés ne comporte aucun carré et on a alors la solution optimum puisqu'on a montré qu'il est impossible de placer 13 points.
- Tous les cas étudiés comportent au moins un carré et il est donc impossible de placer 12 points sans former de carré.



Sur les figures ci-dessus, les points marqués en rouge sont ceux qu'on décide de supprimer.

Nous avons dessiné tous les cas où le triangle marqué en rouge est placé dans le coin supérieur gauche.

Les autres cas sont obtenus en tournant la figure d'un ou plusieurs quarts de tour.

Ces 6 figures suffisent donc à envisager toutes les possibilités, on constate que sur chacune d'entre elles les points noirs forment plusieurs carrés. Il est donc impossible de placer 12 points sur la grille sans former de carré.

On peut chercher à prouver d'une manière analogue qu'il est impossible de placer 11 points sur la grille sans former de carré, mais le nombre de cas à étudier est sensiblement plus élevé, cela ne nous semble donc pas opportun, même au collège.