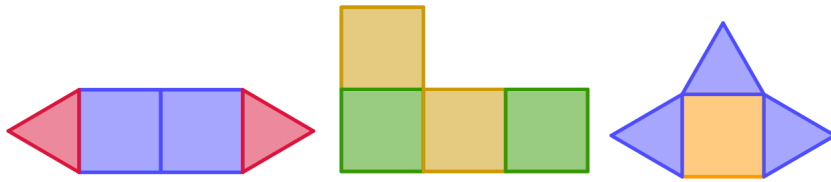


Les quattros

En bref

En assemblant par leurs côtés quatre figures qui sont toutes des carrés ou des triangles équilatéraux dont les côtés ont la même longueur, on peut réaliser de nombreuses figures plus complexes. On cherche à en inventer le plus possible, voire à être exhaustif.

Introduction du problème



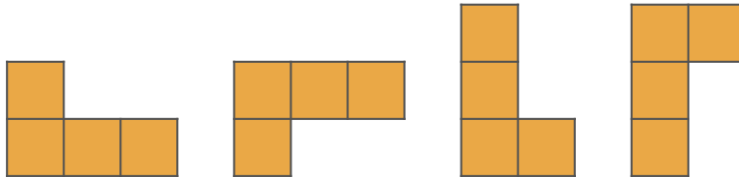
J'ai affiché trois figures qu'on appellera des « quattros ».

Un quatro se fabrique en assemblant par leurs côtés quatre figures : des carrés ou des triangles équilatéraux. Les côtés des carrés et des triangles ont tous la même longueur.

Vous allez compléter la collection en inventant chacun un autre quatro.

Essayez d'éviter de dessiner un de mes modèles dans une autre position.

Ces quattros par exemple sont tous identiques :



Pour l'instant, vous pouvez dessiner à main levée, mais faites des dessins suffisamment grands pour qu'on les voie bien quand ils seront affichés.

L'enseignante affiche toutes les propositions et les numérote (y compris ses propres exemples)

Les élèves sont invités à repérer s'il existe des paires identiques.

Quand un élève affirme que deux quattros sont identiques, l'enseignant les rapproche pour faciliter la vérification. Si cela ne suffit pas, il les fait pivoter pour qu'ils soient orientés de la même façon ou symétriques par rapport à un axe vertical.

Quand la collection est assez fournie et que les doublons sont éliminés, l'enseignante fait construire les figures soigneusement en les répartissant entre les élèves, ce sont ces nouvelles productions qui sont placées dans le classeur de recherches.

Éléments de relance

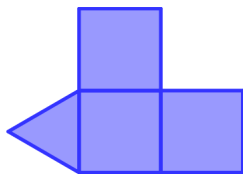
Contrairement au problème « Sykaros » il existe une partition évidente des quattros en 5 familles : ceux qui comportent 4 carrés, ceux qui n'en ont que 3...

Les élèves remarqueront très probablement eux-mêmes cette répartition et s'en serviront pour découvrir de nouveaux exemples : si on n'a presque aucun quatre à 3 carrés, il y a de fortes chances qu'on puisse en inventer de nouveaux dans cette catégorie.

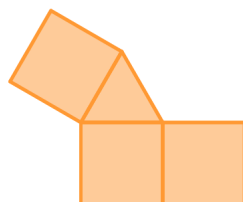
Certaines des 5 familles sont assez nombreuses. Si les élèves ne parviennent pas par eux-mêmes à les organiser l'enseignante proposera de se s'intéresser au nombre de figures identiques adjacentes.

Par exemple, dans la catégorie des quattros comportant 3 carrés, on peut distinguer ces cas :

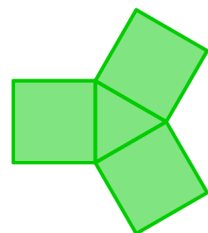
- Les trois carrés forment un seul bloc.



- Deux carrés sont assemblés par un côté, le troisième ne l'est pas.



- Il n'y a pas de carrés assemblés par un côté.



Dans la catégorie des quattros comportant 2 carrés et 2 triangles, on peut distinguer ces cas :

- Les deux carrés sont adjacents (ils se touchent par un côté), les triangles le sont aussi.
- Les deux carrés sont adjacents, les triangles ne le sont pas.
- Les deux carrés ne sont pas adjacents, les triangles le sont.
- Les deux carrés ne sont pas adjacents, les triangles non plus.

Éléments de preuve

Les catégories qui ont servi à enrichir la recherche d'exemples servent également de support à la preuve de l'exhaustivité.

Un quatre fait nécessairement partie d'une des 5 catégories suivantes (et seulement d'une) :

- Les quattros à 4 carrés
- Les quattros à 3 carrés et 1 triangle
- Les quattros à 2 carrés et 2 triangles
- Les quattros à 1 carré et 3 triangles
- Les quattros à 4 triangles

Si on est certain d'avoir tous les quattros possibles dans chacune des catégories, on a donc la collection complète des quattros.

Pour les quattros à 4 carré et ceux à 4 triangles, on peut admettre qu'on les a tous sans formaliser une preuve. Pour les autres catégories, on procède à un nouveau découpage en catégories plus petites.

Par exemple, un quatro à 3 carrés fait nécessairement partie d'une des 3 catégories suivantes (et seulement d'une) :

- Les trois carrés forment un seul bloc
- Deux carrés sont assemblés par un côté, le troisième ne l'est pas.
- Il n'y a pas de carrés assemblés par un côté.

Si on est certain d'avoir tous les quattros possibles dans chacune de ces catégories, on a donc la collection complète des quattros à 3 carrés.

Aménagements pour le cycle 2

Effectuer la recherche d'exemples en assemblant des carrés et des triangles découpés dans des feuilles imprimées.

Ne pas chercher à prouver l'exhaustivité.

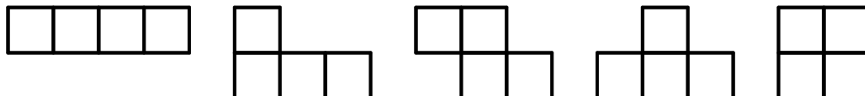
Prolongements pour le cycle 4

Laisser une plus grande part aux élèves dans la preuve que la collection de quattros dont la classe dispose est exhaustive.

Compléments

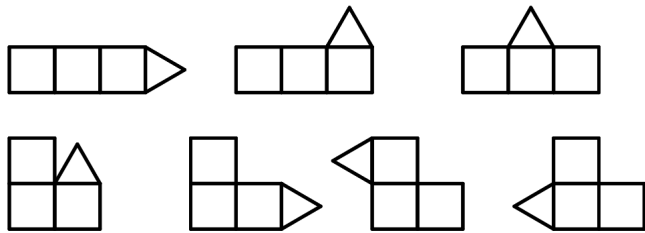
Pour obtenir un inventaire exhaustif, la partition la plus évidente tient compte du nombre de figures de chaque nature. On a donc 5 catégories (de 4 carrés à aucun carré) dont certaines sont suffisamment nombreuses pour mériter d'être elles même partagées.

4 carrés

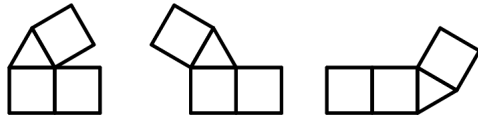


1 triangle, 3 carrés

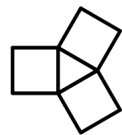
les 3 carrés forment un seul bloc



2 carrés sont adjacents, pas le troisième.

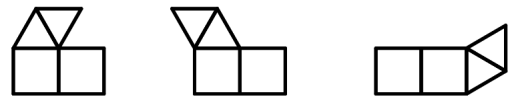


Les carrés ne sont pas adjacents.

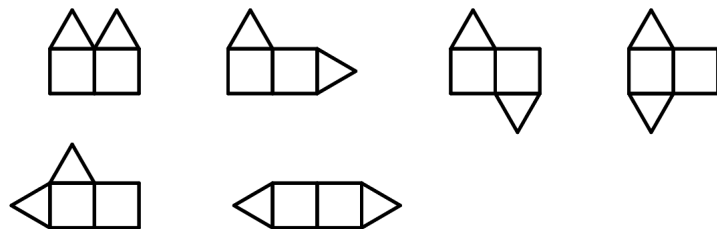


2 triangles, 2 carrés

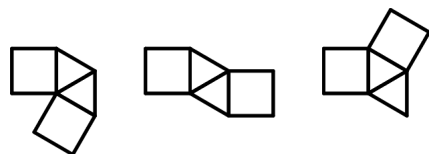
Les deux carrés sont adjacents, les deux triangles également.



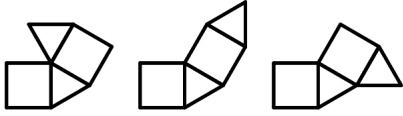
Les deux carrés sont adjacents, pas les triangles.



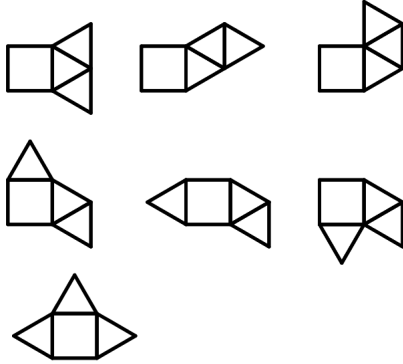
Les deux triangles sont adjacents, pas les carrés.



Les deux carrés ne sont pas adjacents, les triangles non plus.



3 triangles, 1 carré



4 triangles

